

Hinweise zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung 2022 im Land Brandenburg Prüfungsschwerpunkte Mathematik

Leistungskurs

1. Schwerpunkte

Grundlage für die Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg, Mathematik (Rahmenlehrplan, gültig ab 1. August 2018) und die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss der KMK vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den in o. g. Rahmenlehrplänen beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

In der Abiturprüfung wird **nicht** gefordert:

- K1 Beweise erläutern oder entwickeln
- L5 Simulationen

2. Struktur der Aufgabenvorschläge

2.1 Aufgabenstellungen und Aufgaben

Jeder Aufgabenvorschlag besteht aus vier voneinander unabhängigen Aufgabenstellungen.

Die Aufgabenstellung 1 bezieht sich auf alle drei Themengebiete (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik) und wird ohne mathematische Hilfsmittel (Formelsammlung, wissenschaftlicher Taschenrechner, CAS-Gerät) bearbeitet. Bei der Aufgabenstellung 1 sind alle Teilaufgaben zu bearbeiten, es gibt keine Wahlmöglichkeit.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen sind drei voneinander unabhängige, komplexe Aufgaben zu bearbeiten. Dafür stehen die zugelassenen Hilfsmittel zur Verfügung. Eine Aufgabenstellung bezieht sich dabei jeweils auf eines der drei Themengebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Zu diesen drei Aufgabenstellungen werden dem Prüfling jeweils zwei gleichwertige und voneinander unabhängige Aufgaben zur Wahl vorgelegt, von denen durch den Prüfling jeweils genau eine zu bearbeiten ist. Insgesamt muss jeder Prüfling Aufgaben im Umfang von 120 Bewertungseinheiten (BE) bearbeiten und zwar:

- | | |
|--|-------------------|
| - Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreie Aufgaben) | Aufgabe mit 30 BE |
| - Aufgabenstellung 2 (Analysis) | Aufgabe mit 40 BE |
| - Aufgabenstellung 3 (Analytische Geometrie) | Aufgabe mit 25 BE |
| - Aufgabenstellung 4 (Stochastik) | Aufgabe mit 25 BE |

Für jeden Aufgabenvorschlag erfüllt die Verteilung der Teilleistungen auf die drei Anforderungsbereiche die Vorgaben der Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik.

2.2 Aufgabenarten

Bei der Aufgabenstellung 1, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Sie beziehen sich auf alle drei Themengebiete und können auch Problemstellungen enthalten, die dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen ist jede Aufgabe in mehrere Teilaufgaben untergliedert. Jede dieser Aufgaben enthält Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen.

Die Aufgaben für das CAS-Abitur (siehe 3.) haben vergleichbare inhaltliche Schwerpunkte und eine gleichwertige Verankerung im Rahmenlehrplan, können sich jedoch u. U. deutlich von den Aufgaben unterscheiden, die ohne CAS zu bearbeiten sind. Die Aufgaben für das CAS-Abitur sind nicht auf eine spezielle Software oder ein spezielles Gerät hin ausgerichtet.

2.3. Inhaltliche Schwerpunkte

Die Prüfungsaufgabe beinhaltet Teilaufgaben, durch die alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen überprüft werden (K1 mathematisch argumentieren, K2 Probleme mathematisch lösen, K3 mathematisch modellieren, K4 mathematische Darstellungen verwenden, K5 mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, K6 mathematisch kommunizieren). Die fachlichen Inhalte und Themen ergeben sich aus den in den o. g. Rahmenlehrplänen festgelegten abschlussorientierten Standards.

Bei den in der schriftlichen Abiturprüfung zu bearbeitenden Aufgaben werden innermathematische und realitätsbezogene Anforderungen in einem ausgewogenen Verhältnis gestellt.

Mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten, die in der Sekundarstufe I erworben werden müssen und in den Rahmenlehrplänen als Eingangsvoraussetzungen für die gymnasiale Oberstufe genannt werden, sind ebenfalls bei der Bearbeitung der Prüfungsaufgabe zu nutzen bzw. anzuwenden.

Die unten genannten inhaltlichen Schwerpunkte beziehen sich sowohl auf die Aufgaben im hilfsmittelfreien Teil, als auch auf die komplexen Aufgaben zu den drei Sachgebieten. Dabei können die genannten Inhalte in vielfältiger Weise zum Tragen kommen: Zum Berechnen, Skizzieren, Interpretieren, Beschreiben, Beurteilen, Erläutern, Nachweisen, Begründen, Untersuchen und Argumentieren, aber auch für das Angeben, Nennen, Konstruieren, Ermitteln oder Untersuchen von Beispielen oder Objekten, die bestimmte vorgegebene Bedingungen erfüllen. Bei der Bearbeitung von komplexen Aufgaben ist es auch erforderlich, mehrere Schritte zur Lösung einer Teilaufgabe einzusetzen.

Analysis

Gleichungen und Gleichungssysteme

- Verfahren zur Lösung von linearen, quadratischen und biquadratischen Gleichungen sowie Gleichungen höheren Grades unter Verwendung der Polynomdivision und der Linearfaktorzerlegung
- natürliche Exponentialgleichungen unter Anwendung des natürlichen Logarithmus und der Logarithmengesetze für den natürlichen Logarithmus
- Gauß-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme
- Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems (eine Lösung, keine Lösung, unendliche viele Lösungen)
- Goniometrische Gleichungen
- Wurzelgleichungen

Differentialrechnung

Betrachtet werden können Funktionen und Funktionsscharen, die in einfachen Fällen durch Verknüpfungen (additiv, multiplikativ) und Verkettungen zweier Funktionen aus folgenden Funktionsklassen gebildet werden können:

- natürliche Exponentialfunktionen
 - ganzrationale Funktionen
 - Potenzfunktionen der Form $f(x) = a \cdot x^n$; $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{Z}$; $n \neq -1$
 - natürliche Logarithmusfunktionen
 - Wurzelfunktionen
 - Sinus- und Kosinusfunktionen.
- Eigenschaften der oben genannten Funktionen: Definitionsbereich, Wertebereich, Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung und Axialsymmetrie bzgl. der Ordinatenachse, Verhalten im Unendlichen, Extrempunkte, Wendepunkte, Sattelpunkte, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Monotonie, Randextrema, Darstellung der Graphen aus den ermittelten Eigenschaften
 - Grenzwerte von Funktionen ($x \rightarrow \pm\infty$; $x \rightarrow x_0$) auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs auch bei der Bestimmung von Ableitungen

- Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen
- Tangenten- und Normalengleichungen
- Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen
- Mittlere und lokale Änderungsrate
- Berechnen und deuten von Änderungsraten
- Untersuchung von Zusammenhängen und Beschreibung und Modellierung von Sachsituationen (u. a. Rekonstruktion von Funktionsgleichungen, Extremalprobleme)
- Ortskurven von Extrem- und Wendepunkten von Funktionsscharen

Ableitungsregeln und Ableitungsbegriff

- Ableitung als lokale Änderungsrate, Anstieg der Tangente
- Funktionale Beschreibung und Interpretation von Änderungsraten (Ableitungsfunktion)
- Ableitung mithilfe von Konstantenregel, Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
- Zusammenhang zwischen Ableitung und Monotonie, Krümmung, Extrema, Wendepunkten (notwendige und hinreichende Bedingungen und inhaltliche Begründung zur Existenz)
- Zusammenhänge zwischen Ableitungsgraph und Funktionsgraph

Integralrechnung

Betrachtet werden können Funktionen und Funktionsscharen, die in einfachen Fällen durch Verknüpfungen (additiv, multiplikativ) und Verkettungen zweier Funktionen aus folgenden Funktionsklassen gebildet werden können:

- natürliche Exponentialfunktionen
 - ganzrationale Funktionen
 - Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten
 - natürliche Logarithmusfunktionen
 - Wurzelfunktionen
 - Sinus- und Kosinusfunktionen.
-
- Grenzwerte von Funktionen (propädeutischer Grenzwertbegriff) für die Bestimmung des Integrals
 - Bestimmtes Integral insbesondere als rekonstruierter Bestand
 - Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
 - Integrieren als Umkehrung des Differenzierens
 - Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals (Faktorregel, Summenregel, Vorzeichenumkehr bei Vertauschen der Integrationsgrenzen, Additivität der Grenzen)
 - Integrationsregeln: Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Konstantenregel, Integration durch **lineare** Substitution
 - Zusammenhang zwischen Funktionsgraphen der Funktion, der Ableitungsfunktion und der Stammfunktion
 - die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit Basis e und Bestimmung von Integralen
 - Inhalte von Flächen mit Begrenzung durch Funktionsgraphen, durch Koordinatenachsen oder durch achsenparallele Geraden
 - Inhalte unbegrenzter Flächen mittels uneigentlicher Integrale
 - Anwendung der Integralrechnung zur Volumenberechnung von Rotationskörpern (auch von zusammengesetzten Rotationskörpern) bei Rotation eines Graphen um die x-Achse
 - Berechnung von Scharparametern bzw. von Integrationsgrenzen bei gegebenem Volumen oder Flächeninhalt

Analytische Geometrie

Zwei- bzw. dreidimensionales Koordinatensystem

- Darstellen von Punktmengen, Geraden, Ebenen, Körpern
- Länge einer Strecke, Mittelpunkt einer Strecke, Teilverhältnisse von Strecken

Vektoren im Anschauungsraum

- Vektorbegriff
- Addition von Vektoren
- Kommutativgesetz, Assoziativgesetz bei der Vektoraddition
- Nullvektor, Gegenvektor
- Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
- Distributivgesetz bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
- Koordinatendarstellung von Vektoren
- Betrag eines Vektors
- Einheitsvektor
- Ortsvektor
- lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren
- Darstellung eines Vektors als Linearkombination anderer Vektoren
- Beschreibung geometrischer Objekte mittels Vektoren

Affine Geometrie

- Parametergleichung einer Geraden
- Lagebeziehung zwischen Punkt und Gerade
- Lagebeziehung zwischen Geraden (Schnittpunkt, parallel, identisch, windschief)
- Geradenscharen
- Strecken und Vielecke als Teile von Geraden und Ebenen
- Parametergleichung und Koordinatenform einer Ebene
- Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene, Gerade und Ebene (Durchstoßpunkt, Spurpunkte), Ebene und Ebene (Schnittgerade, Spurgerade)
- Ebenenscharen
- Gleichungssysteme mit bis zu drei Variablen und ihre Lösungen (geometrisch, algebraisch)

Metrische Geometrie

- Skalarprodukt, geometrische Deutung des Skalarproduktes
- Schnittwinkel (zwischen Geraden, Gerade und Ebene, sowie Ebene und Ebene)
- Orthogonalität von Vektoren
- Orthogonalität von Geraden, Ebenen, Gerade und Ebene
- Normalengleichung von Ebenen (Hessesche Normalenform), Zusammenhang zwischen Parameter-, Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene
- Abstandsberechnungen:
 - Abstand eines Punktes von einer Ebene
 - Abstand eines Punktes von einer Geraden
 - Abstand zueinander paralleler Geraden
 - Abstand windschiefer Geraden
 - Abstand zueinander paralleler Ebenen
 - Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene
 - Flächeninhalte und Volumina

Stochastik

Einführung in die Stochastik

- Grundbegriffe der Mengenlehre (leere Menge, Teilmenge, Vereinigungs-, Durchschnittsmenge)
- Axiomensystem von Kolmogorow
- Venn-Diagramme
- Zufallsexperimente
- kombinatorische Abzählverfahren
- Baumdiagramme (Pfadregeln)
- Anwendungssituationen mit Hilfe von Urnenmodellen (mit und ohne Zurücklegen)
- hypergeometrische Verteilung
- Ergebnisse, Ereignis, Gegenereignis
- Lage- und Streumaßen einer Stichprobe (Maximum, Minimum, oberes und unteres Quartil, arithmetisches Mittel, Modalwert, Median, Erwartungswert, Spannweite, mittlere lineare Abweichung, Varianz, Standardabweichung)
- Beziehungen zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von Zufallsgrößen
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen

Bernoulli-Ketten und Binomialverteilung als spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Bernoulli-Experiment
- Bernoulli-Kette,
- Binomialverteilung und ihre Kenngrößen (n , p), Punktwahrscheinlichkeit, Intervallwahrscheinlichkeiten
- Eigenschaften der Binomialverteilung
- Binomialverteilung im Histogramm, auch kumulative Darstellungen
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen

Normalverteilung als spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung

- „Glockenform“ als Grundvorstellung normalverteilter Zufallsgrößen
- Einfluss von Erwartungswert und Standardabweichung auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion
- Erwartungswert und Standardabweichung normalverteilter Zufallsgrößen
- Normalverteilung als Grenzfall der Binomialverteilung
- Sigma-Regeln
- Satz von Moivre-Laplace

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes
- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Baumdiagramme und Vierfeldertafeln im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten
- stochastische Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Ereignissen

Methoden der beurteilenden Statistik

- Schätzen von Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten
($k - \sigma$ -Regeln, $1/\sqrt{n}$ -Gesetz)
- Hypothesentests (Alternativtests, ein- und zweiseitige Signifikanztests) für binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen)
- Unsicherheit der Ergebnisse von Hypothesentests
- Signifikanzniveau, Ablehnungsbereich, Entscheidungsregel
- Fehler 1. und 2. Art

3. Hilfsmittel

Zugelassene mathematische Hilfsmittel sind

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist und für die Verwendung im Abitur zugelassen ist (außer Aufgabe 1)
- Für das Fach „Mathematik ohne CAS“: Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig¹ sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatischen Lösens von Gleichungen jedweder Form verfügen (außer für Aufgabe 1)
- Standard-Zeichenwerkzeuge

Schulen, die als Prüfungsfach „Mathematik mit CAS“ angegeben haben, erhalten die CAS-Aufgaben und die zugehörigen Erwartungshorizonte. Die Prüflinge nutzen außer für Aufgabe 1 das an der Schule eingeführte CAS-Rechengerät. Wird das CAS als PC-Software eingesetzt, ist die Benutzung von weiterer Software über das CAS hinaus nicht zulässig. Ausgedruckte Dokumente sind nicht als Prüfungsleistung zugelassen; ggf. aber der Ausdruck von Grafiken.

CAS-Geräte und CAS-Software, die über folgende Funktionen verfügen, sind für den Einsatz im CAS-Abitur zugelassen:

- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen (jeweils algebraisch),
- Differenzieren und Integrieren (jeweils algebraisch),
- Rechnen mit Vektoren und Matrizen (jeweils algebraisch),
- Berechnen von Werten der Binomialverteilung, der kumulativen Binomialverteilung und der Normalverteilung,
- Durchführen von Berechnungen in Tabellen,
- Darstellen von Graphen.

Außerdem wird vorausgesetzt, dass das CAS-Gerät vor seiner Verwendung in einen Zustand versetzt wird, in dem ein Zugriff auf Daten und Programme, die nicht zum Lieferumfang oder einem Systemupdate gehören, unterbunden ist.

4. Bewertungsgesichtspunkte

Die Begutachtung der Prüfungsarbeit erfolgt nach fachlichen, prüfungsdidaktischen und pädagogischen Gesichtspunkten auf der Grundlage des Erwartungshorizonts und der darin verbindlich vorgegebenen Verteilung der Bewertungseinheiten. Es dürfen nur ganze Bewertungseinheiten erteilt werden. Die Bewertung der Prüfungsarbeit erfolgt auf der Grundlage der rechtlichen Vorgaben. Sie muss durch die Randbemerkungen und das Gutachten nachvollziehbar sein.

Für richtig vollzogene Teilschritte, in die falsche Zwischenergebnisse eingegangen sind (Fehlerfortsetzung), wird die vorgegebene Anzahl der Bewertungseinheiten erteilt, es sei denn, Teilschritte haben sich durch die vorher begangenen Fehler wesentlich vereinfacht. Für andere als im Erwartungshorizont dargestellte, aber gleichwertige Lösungswege ist die Verteilung der Bewertungseinheiten für die jeweilige Teilaufgabe sinngemäß vorzunehmen.

5. Dauer und Organisation der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten und beinhaltet eine individuelle Lese- und Auswahlzeit für die Prüflinge von 30 Minuten.

Die Prüfung beginnt mit der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 (hilfsmittelfreie Aufgaben) in einem Umfang von 70 Minuten. Die Lösungen der Aufgaben dieses Aufgabenteils werden nach 70 Minuten eingesammelt. Prüflinge, die für die Aufgabenstellung 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit

¹ Ein Taschenrechner gilt als programmierbar und ist damit als Hilfsmittel nicht zugelassen, wenn durch fest eingespeicherte oder vom Benutzer einzuspeichernde Programme bzw. Formeln Lösungsalgorithmen automatisch ausgeführt werden. Zulässig ist aber, dass er über elementare statistische Funktionen verfügt. Ein Taschenrechner gilt als grafikfähig und ist damit als Hilfsmittel nicht zugelassen, wenn er eine grafische Ausgabe besitzt. Ein Taschenrechner darf darüber hinaus auch keinen Textspeicher besitzen; zulässig sind hingegen fest eingespeicherte physikalische Konstanten.

Bearbeitung der weiteren Aufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln. Nach dem Ablauf der Bearbeitungszeit für die Aufgabenstellung 1 erhalten alle Prüflinge die Hilfsmittel.

Nach der Bearbeitung der Aufgabenstellung 1 entscheidet jeder Prüfling individuell, wann und in welcher Reihenfolge die Auswahlentscheidung bei den weiteren Aufgabenstellungen getroffen wird.